

# **Solución al problema de envasado en pesadoras multicabezales mediante la optimización matemática**

**Alexander Pulido-Rojano**

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad Simón Bolívar

Av. 59 No. 59-92. A.A. 5059, Barranquilla, Colombia  
[apulido3@unisimonbolivar.edu.co](mailto:apulido3@unisimonbolivar.edu.co)

**J. Carlos García-Díaz**

Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad  
Universitat Politècnica de València,

Camino de Vera, s/n. 46022, Valencia, Spain  
[juagardi@eio.upv.es](mailto:juagardi@eio.upv.es)

## **Resumen**

La optimización matemática es ampliamente utilizada para encontrar la mejor respuesta a una función objetivo que se desea optimizar y cuya solución está sujeta a restricciones que intentan simular la realidad. Su aplicación es fundamental en la solución de problemas industriales en donde exista una oportunidad de mejora. En esta investigación presentamos un nuevo enfoque de optimización para la solución al problema de envasado en máquinas pesadoras multicabezales. En este problema, cada producto envasado está compuesto por la suma de pesos contenidos en un subconjunto de tolvas en la pesadora multicabezal. El enfoque de optimización propuesto pretende diseñar un modelo matemático y un algoritmo para llevar a cabo el proceso. Además, se propone un nuevo criterio de selección del peso total de paquete, estudiando la configuración de llenado de las tolvas como método de disminución de la variabilidad. Los resultados numéricos de los parámetros de rendimiento más importantes del proceso de envasado revelan la utilidad de nuestro enfoque.

**Palabras claves:** Optimización, Modelación matemática, Configuración de llenado, Proceso de envasado, Pesadoras multicabezales.

## **1. Introducción**

La optimización constituye una disciplina fundamental en áreas como la informática, la inteligencia artificial o la investigación de operaciones. La optimización se concibe como el proceso de intentar encontrar la mejor solución posible a un problema, generalmente en un tiempo limitado (Nemhauser y Wolsey, 1988; Cook et al., 1998). Se puede decir que en un problema de optimización hay muchas posibles soluciones y alguna forma clara de comparación entre ellas, de manera que el problema existe si y solo si se dispone de un conjunto de soluciones candidatas diferentes que pueden ser comparadas (Duarte et al., 2007). Dependiendo de la complejidad algorítmica, los problemas se pueden categorizar en P, NP, NP-completo y NP-duros. Para mayor información consultar Duarte et al. (2007), Blum et al. (2008), Marler (2009), Erdogdu (2009), y Bierlaire (2015).

Existe una colección importante de problemas de optimización para los que no se dispone de algoritmos exactos que permitan encontrar la solución óptima en tiempos razonables. Sin embargo, para resolver estos problemas, una alternativa consiste en diseñar algoritmos aproximados que encuentren una solución de alta calidad en un tiempo que pueda asumirse. Cada problema está representado por un modelo matemático

compuesto por una función objetivo y restricciones que de alguna manera personifican el problema de optimización (Bierlaire, 2015).

En la presente investigación se diseñan un modelo matemático y un algoritmo enumerativo para solucionar el problema de envasado en máquinas pesadoras multicabezales. Además, se propone un método para la configuración inicial de la máquina durante el proceso de envasado. El algoritmo fue programado y ejecutado en Pascal para distintas condiciones de configuración del proceso de envasado. El presente artículo está estructurado de la siguiente manera. Sección 2 presenta un resumen de las referencias científicas encontradas en el campo de los procesos de envasado en máquinas multicabezales. En la sección 3, se describe la pesadora multicabezal y el proceso de envasado. En la sección 4, se presentan el método para la configuración inicial de la pesadora, el algoritmo de envasado propuesto y el modelo matemático de optimización. La sección 5 muestra los resultados y el análisis de los experimentos numéricos. La sección 6 presenta las conclusiones de la presente investigación.

## **2. Revisión de la literatura**

Las referencias científicas en el campo del proceso de envasado en pesadoras multicabezales son escasas. Básicamente se dispone de documentos de conferencias, patentes y documentación comercial de fabricantes de este tipo de máquina. Algunos investigadores han estudiado la posibilidad de mejorar los procedimientos durante el proceso de envasado. Por ejemplo, Salicrú et al. (1996) y Barreiro et al. (1998) propusieron el uso del índice de reducción de variabilidad para la reducción y control de la variabilidad del proceso de producción. Keraita y Kim (2006) investigaron el esquema óptimo para la determinación del tiempo de operación de los alimentadores radiales vibrantes en las pesadoras multicabezales. Keraita y Kim (2007) propusieron un algoritmo de pesaje para pesadoras multicabezales basado en operaciones bits. Karuno et al. (2007) introdujeron un segundo objetivo llamado “prioridad”. Estos investigadores formularon el problema como un problema de optimización bi-criterio y propusieron un algoritmo basado en programación dinámica. La heurística propuesta tiene como objetivo minimizar la duración máxima del producto en el sistema de envasado, al tiempo que busca que el peso total de cada paquete este lo más cerca posible al peso objetivo. Algunos autores (Imahori et al., 2011; Imahori et al., 2012; Karuno et al., 2013; Karuno and Tateishi, 2014) han estudiado la posibilidad de mejorar el modelo de optimización bi-criterio propuesto por Karuno et al. (2007). Pulido-Rojano et al. (2015), presentan un nuevo enfoque bi-objetivo para la optimización del proceso. Los autores mostraron cómo la importancia relativa de los objetivos considerados (peso del paquete y “prioridad” de las tolvas) se puede gestionar y ajustar dinámicamente. Pulido-Rojano y García-Díaz (2016a) propusieron estudiar el ajuste de llenado de las tolvas como una forma de reducir la variabilidad en el proceso de envasado. Beretta et al. (2016) propusieron determinar el caudal óptimo de producto de cada alimentador radial mediante el uso de diversos algoritmos de optimización, donde la función objetivo es minimizar el valor esperado del costo de producción por paquete “conforme” en un período de tiempo fijo. En del Castillo et al. (2017), se desarrolló un modelo de optimización heurístico basado en una caracterización detallada de lo que constituye una solución casi óptima al problema de la configuración de la pesadora multicabezal. Los investigadores intentaron encontrar los puntos de alimentación de las tolvas buscando minimizar el error cuadrático medio del peso del paquete. Pulido-Rojano y García-Díaz (2016b) y, García-Díaz y Pulido-Rojano (2017) propusieron un gráfico de control modificado para monitorear y controlar el proceso de producción. García-Díaz et al. (2017) encontró las condiciones operacionales óptimas para el proceso de envasado a través de un algoritmo bi-objetivo. Otros autores, Imahori et al. (2012) y Karuno et al. (2010) investigaron diferentes tipos de operaciones de envasado. En estas investigaciones, se desarrollaron diferentes algoritmos para sistemas de envasado de alimentos de doble capa y sistemas de envasado dúplex.

### 3. Pesadoras multicabezales

Las pesadoras multicabezales son una parte importante en las modernas líneas de envasado en donde se requiere un peso de paquete  $W$  con una estrecha tolerancia a su peso objetivo  $T$ . Hoy en día, estas máquinas son ampliamente utilizadas para la dosificación de muchos tipos de productos y tienen una extensa gama de aplicaciones en la industria alimentaria. Por ejemplo, para el envasado de pastas, granos de café, cereales, snacks, caramelos, verduras e incluso para envasar trozos de aves y carne de res. Sus aplicaciones abarcan también el envasado de artículos no alimentarios, como clips, clavos, tornillos y una variedad de otros artículos de hardware pequeños (Beretta et al., 2016; del Castillo et al., 2017).

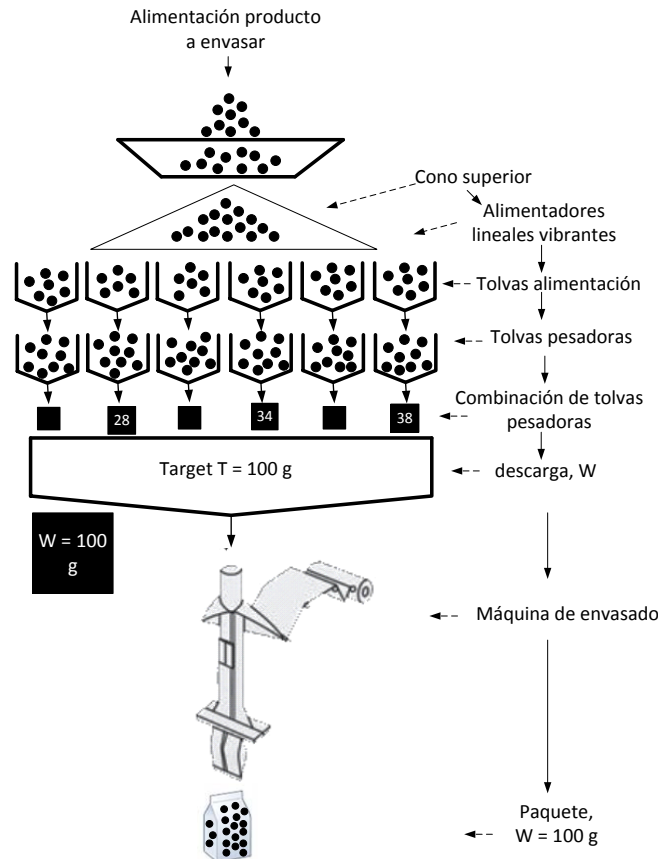


Figura 1. Disposición de los alimentadores y tolvas en una pesadora multicabezal radial

Las pesadoras multicabezales utilizan técnicas de pesaje combinatorio que hacen posible obtener pesos más cercanos a  $T$  que con las técnicas convencionales de pesaje. El sistema de pesaje combinatorio se compone principalmente de un sistema de alimentadores vibrantes, un conjunto  $H$  de tolvas de alimentación, un conjunto  $H$  de tolvas de pesaje y un conducto de descarga a una máquina de envasado. La figura 1 presenta el esquema de los componentes básicos de una pesadora multicabezal. A continuación se presenta una descripción genérica de cada componente.

- **Sistema de alimentadores.** Está compuesto por un conjunto  $H$  de alimentadores vibrantes (canales vibratorios). Estos son normalmente en forma de cinta; la cinta se controla para depositar una fracción del peso objetivo en las tolvas de alimentación ubicadas encima de las tolvas de pesaje. Teniendo en cuenta que los alimentadores radiales son independientes, el operador de la máquina puede elegir un caudal diferente de producto para cada uno de ellos.

- **Tolvas de alimentación.** Las tolvas de alimentación actúa como un almacén intermedio para contener el producto del sistema de alimentación mientras que la tolva de pesaje, del siguiente nivel, se está estabilizando. El sistema de pesaje debe tener producto inactivo para asegurar resultados precisos en el pesaje. Si las tolvas de alimentación no estuviesen presentes sería necesario emplear más tolvas de pesaje para alcanzar los mismos niveles de rendimiento. Además, otros métodos también tendrían que ser utilizado para asegurar que el producto no sea introducido en la tolva de pesaje, ya sea durante el tiempo de estabilización o inmediatamente antes de una descarga de producto a la máquina de envasado.
- **Tolvas de pesaje.** Estas tolvas están soportadas por un transductor de peso adecuado. Los datos de los pesos se alimenta a un sistema electrónico u ordenador incorporado en la máquina que combina todos los pesos en las tolvas de pesaje y determina qué tolvas deben descargarse a la máquina de envasado. El uso de múltiples tolvas de pesaje hace posible lograr una alta precisión y velocidad, mientras que se reduce considerablemente la variabilidad en el producto envasado.
- **Conducto de descarga.** Este conducto facilita el correcto flujo del producto descargado de las tolvas de pesaje a la máquina de envasado. Está diseñado especialmente para evitar atascos o adherencia de producto a las paredes del canal.

### 3.1 Proceso de envasado

El proceso de envasado en pesadoras multicabezales consiste en seleccionar un subconjunto  $H'$  del conjunto  $H$  de las  $n$  tolvas de pesaje para producir un paquete de producto. Para ello, los alimentadores vibrantes distribuyen producto a cada tolva de alimentación  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Cuando una cierta cantidad  $x_i$  de producto es suministrado a cada tolva de alimentación, los alimentadores se detienen y el contenido de las tolvas se traslada a cada tolva de pesaje  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Los productos son pesados y sus valores son transmitidos a la unidad de control de la pesadora multicabezal, la cual calcula todas las combinaciones de pesos posibles. La combinación de pesos mayor o igual a  $T$  son descargados de sus correspondientes tolvas de pesaje, siendo liberados a la máquina de envasado a través de los conductos de descarga. Posteriormente nuevos productos son suministrados en las tolvas vacías y así continua la operación hasta alcanzar la cantidad de producción  $Q$  deseada. La figura 2 muestra un ejemplo del proceso de envasado para un peso objetivo  $T = 100$  gramos.

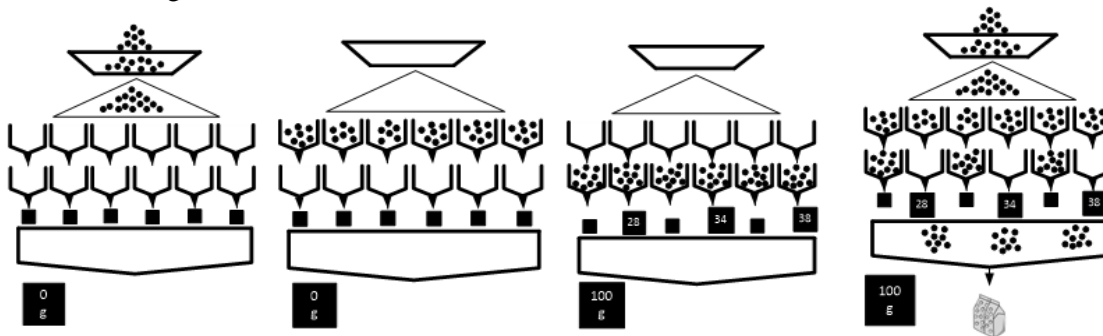


Figura 2. Proceso de envasado para un peso objetivo de 100 gr en una pesadora multicabezales

Los pesos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) en las tolvas siguen una distribución de probabilidad normal. A partir de un estudio realizado mediante el análisis de datos reales, diversos autores (Beretta, and Semeraro, 2012; Beretta et al., 2016; del Castillo et al., 2017) han observado que los pesos  $x_i$  se distribuyen normalmente  $x_i \sim N(\mu, \sigma)$ , donde  $\mu$  es el peso medio del producto a suministrar a las tolvas, y  $\sigma$  es la desviación estándar de los pesos en cada tolva  $i$ . En los alimentadores radiales vibrantes, estas cantidades están correlacionadas, y la correlación depende de la forma y peso del producto. Autores como Beretta y Semeraro (2012), Beretta et al. (2016), del Castillo et al. (2017) abordan estas correlaciones. Estos autores afirman que  $\sigma$  depende de la cantidad media  $\mu$ , de acuerdo con la siguiente relación lineal:  $\sigma = \gamma\mu$ , donde  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) es un “coeficiente de proporcionalidad” entre  $\mu$  y  $\sigma$ , que depende del producto a envasar.

El cardinal del subconjunto  $H'$  dependerá del número de tolvas de pasaje combinadas  $k$  en cada operación de envasado, por lo que  $|H'| = k$ . Imahori et al. (2011) señalo que cuando se busca minimizar la diferencia entre los pesos combinados en  $k$  tolvas y el peso objetivo del paquete  $T$ , esto, es equivalente al problema combinatorio de la suma de subconjuntos NP-completo (Garey y Johnson, 1979) cuando  $k$  no es previamente fijado como constante.

En la presente investigación, proponemos resolver este problema a través de la programación de algoritmos aproximados los cuales probaran los casos en los que el número de tolvas combinadas  $k$  en cada operación de envasado es constante y fijado de antemano. Esto causaría que el suministro promedio de producto  $\mu$  a las  $n$  tolvas sea fijado en  $\mu = T/k$ . Además, como enfoque de selección, el peso total del paquete  $W$  seleccionado para formar el paquete será aquel que minimice la diferencia, en valor absoluto, entre  $W$  y  $T$ . Es decir, que  $W$  puede ser inferior o superior a  $T$  ( $W \leq T$  o  $W \geq T$ ). Este enfoque puede ser configurado por el fabricante de la pesadora multicabezales, si así se desea.

En particular, si todas las tolvas se llenan de manera independiente de acuerdo con la misma distribución  $N(\mu, \sigma)$ , y las  $k$  tolvas son seleccionadas aleatoriamente en cada operación de envasado, entonces el peso de los paquetes seguiría una distribución normal  $N(k\mu, \sqrt{k}\sigma)$ . En estos casos, se espera que el peso medio del paquete  $k\mu$  sea igual al objetivo  $T$ . El valor de  $\sqrt{k}\sigma$  (la desviación estándar si las tolvas se seleccionadas al azar) se considera un índice de calidad en el proceso de envasado.

Aunque existen diversos métodos de optimización fundamentados en la optimización matemática, la formulación matemática al problema de envasado estará orientada a los modelos de asignación como método de solución en donde utilizaremos variables de tipo binario para la selección de pesos en las tolvas (ver sección 4.3).

#### **4. Enfoque de optimización**

Esta sección se presenta el enfoque propuesto para la configuración inicial en el suministro de producto a las tolvas de pesaje, el modelo matemático de optimización y el algoritmo propuesto para llevar a cabo el proceso de envasado.

##### **4.1 Configuración inicial de llenado**

En la optimización del proceso de producción se consideraran los casos en los que cada tolva  $i$  es llenada con una cantidad media diferente de producto  $\mu_i$  (en lugar de un valor común  $\mu$ ). Se espera que el grado de variación entre estos pesos promedios en las tolvas  $\mu_1 \dots \mu_n$  esté relacionado de alguna manera con la variabilidad final del paquete. En este sentido, vamos a explorar el caso en el que el suministro de producto a las tolvas se fija de tal manera que subgrupos de tolvas comparten el mismo valor de  $\mu_i$ . Esto ha demostrado ser una estrategia eficiente para reducir la variabilidad en el peso del paquete (Barreiro et al., 1998; Keraita y Kim, 2007; Pulido-Rojano y García-Díaz, 2015; Pulido-Rojano y García-Díaz, 2016a).

En esta investigación, el suministro promedio de producto a las tolvas estará determinado por un “valor de cambio” representado por el parámetro  $\delta$ . El valor de  $\delta$  implicará cambios voluntarios en el suministro de producto a las tolvas como un primer paso al iniciar la operación de envasado. En nuestro caso, utilizamos una estrategia de llenado dividiendo el número total de tolvas en la pesadora multicabezal en “3 subgrupos” ( $n_1, n_2$ , y  $n_3$  con  $n = \sum_{j=1}^3 n_j$ ), suministrando una cantidad promedio diferente de producto a cada subgrupo ( $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$ , respectivamente). Durante la operación de envasado la configuración de llenado de tolvas se establecerá de la siguiente forma:  $\mu_1 = \mu - \delta\sigma$ ,  $\mu_2 = \mu$  y  $\mu_3 = \mu + \delta\sigma$ . La configuración de llenado de producto a las tolvas cambia solo cuando  $\delta > 0$ , asegurando diferencias en el suministro

promedio a  $n_1$ ,  $n_2$ , y  $n_3$ . Los valores de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$  también dependen de  $\mu = T/k$  y  $\sigma = \gamma\mu$ . Una vez fijados los valores de  $\mu_j$  podemos calcular los valores de  $\sigma_j$  de la siguiente forma  $\sigma_j = \gamma\mu_j$ .

Para el cálculo de la desviación estándar de los pesos en las tolvas ( $\sigma$ ) usaremos el valor de  $\gamma$  suministrado por Beretta y Semeraro (2012) para el producto conocido como “ravioli” (una pasta seca) con  $\gamma = 0.331$ . Por ejemplo, si  $\gamma = 0.331$ ,  $T = 250$  g y  $k = 5$ , teóricamente, tenemos que  $\sigma = \gamma\mu = 0.331 (250/5) = 16.55$  g y por tanto,  $\sqrt{k}\sigma = 37.01$  g. Sin embargo, como se explica en la subsección 3.1, esto no significa que  $\sqrt{k}\sigma$  sea la variabilidad real obtenida en el paquete producido a través de nuestro enfoque propuesto.

## 4.2. Algoritmo de envasado

El procedimiento propuesto para llevar a cabo el proceso de producción de paquetes es presentado en esta sección. Este procedimiento se realiza para cada producto envasado pretendiendo hallar el subconjunto  $H'$  de  $k$  tolvas que ofrezcan un peso total  $W$  tan cercano (por encima o por debajo) al peso objetivo  $T$  como sea posible. El procedimiento considera que el peso total  $W$  seleccionado para formar el paquete debe estar dentro de un nivel de confianza del 99.73% alrededor del peso objetivo  $T$ . Como hemos mencionado, con algunas modificaciones hechas por el fabricante, este algoritmo de envasado puede ser implementado en el software instalado en la unidad de control de la pesadora multicabezal. El algoritmo de envasado consiste en cuatro pasos, a saber:

- **Paso 1.** Alimentar las  $n$  tolvas de pesaje de acuerdo a su configuración de llenado ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$ ).
- **Paso 2.** Los pesos en las tolvas son utilizados para calcular las combinaciones de peso  $k$  tolvas de pesaje. El peso total  $W$  más próximo al peso objetivo  $T$  se elige si está dentro de un nivel de confianza  $(1 - \alpha)$  de 99.73%, es decir,  $T \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{k}\sigma$ . Donde  $Z_{\alpha/2}$  representa el valor crítico de la distribución de probabilidad normal estándar  $N(0,1)$  para un nivel de significación  $\alpha$ . Entonces, la combinación óptima se envasa y vamos al paso 4.
- **Paso 3.** Si todos los pesos totales (como resultado de todas las combinaciones  $\binom{n}{k}$  de tolvas) están fuera del nivel de confianza todas las tolvas son descargadas. Las tolvas se suministran con nuevos pesos según su respectiva configuración de llenado y volvemos al paso 2.
- **Paso 4.** Si no se ha completado el número total de paquetes requeridos ( $Q$ ), las tolvas vacías se suministran con los nuevos pesos de acuerdo con su respectiva configuración y volvemos al paso 2. De lo contrario, el proceso de envasado termina.

Este algoritmo evalúa un total de  $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$  combinaciones en cada operación de envasado. El paso 2 revela como el procedimiento propuesto es una estrategia enumerativa explícita (o búsqueda exhaustiva) (Michalewicz y Fogel, 2004), por lo tanto, es un método exacto que facilita la selección del subconjunto  $H'$  de tolvas. En el paso 3 del algoritmo, se describe la situación en la que todas las tolvas deben ser descargadas con el fin de evitar la producción de paquetes que no cumplirían con los requisitos de calidad del producto final en términos de peso, es decir, no cumplen con la restricción de nivel de confianza. En términos prácticos, todo este producto descargado se puede tomar y reutilizar en el proceso.

El algoritmo fue implementado en Pascal para valores de  $k$  entre 2 y 7. Además, fue ejecutado en un ordenador personal con Windows 7 Home Premium (64 bits), la CPU Intel Core i5-3317U (1,7 GHz) y 4 GB de memoria. La versión actual de la aplicación permite al usuario introducir la configuración de llenado a los subgrupos de tolvas, así como el número de tolvas en cada subgrupo. También se pueden introducir cambios adicionales en la alimentación de cada subgrupo y un cambio general para simular situaciones fuera de control. Otros parámetros tales como el peso objetivo  $T$ , el número total de tolvas  $n$  y el número total de paquetes a producir  $Q$  también pueden ser introducidos por el usuario. Los resultados incluyen, para cada operación de envasado, el peso total del paquete  $W$ , y la diferencia entre  $T$  y  $W$ . Como resumen

del proceso, el software vuelve la proporción de operaciones de envasado en las que cada tolva se ha utilizado, así como el peso promedio del número total de paquetes producidos ( $\mu_{paquete}$ ), la desviación estándar del número total de paquetes producidos ( $\sigma_{paquete}$ ) y el porcentaje de descarga de tolvas por incumplimiento de la restricción de nivel de confianza ( $DNC$ ). De esta manera, seis algoritmos fueron programados para cada valor de  $k$ . Como ejemplo, la figura 3 muestra la interfaz de usuario de este prototipo para el caso  $k = 4$ .

Figura 3. Interfaz de usuario del software desarrollado para  $k = 4$

### 4.3 Modelo matemático

La solución al problema de escoger el subconjunto  $H'$  de tolvas estará representada por tres vectores  $[y_1^1, \dots, y_{n_1}^1]$ ,  $[y_1^2, \dots, y_{n_2}^2]$  y  $[y_1^3, \dots, y_{n_3}^3]$  definidos para cada subgrupo de tolvas ( $n_1, n_2, y n_3$ ). Los componentes de cada vector ( $y_i^1, y_l^2$  y  $y_r^3$ ) representan un peso  $i, l$  o  $r$ . Los cuales pueden tomar un valor de 1 si el peso en la tolva ha sido seleccionado o valor de 0 si no ha sido seleccionado. La variable a minimizar estará representada por  $Z$ . El modelo matemático puede ser formulado de la siguiente manera:

$$y_i^1 = \begin{cases} 1 & \text{si el peso } i \in n_1 \text{ es elegido} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

$$y_l^2 = \begin{cases} 1 & \text{si el peso } l \in n_2 \text{ es elegido} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

$$y_r^3 = \begin{cases} 1 & \text{si el peso } r \in n_3 \text{ es elegido} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

**Objetivo**  $\rightarrow$  Minimizar  $Z$

**Sujeto a**

$$Z \geq 0 \quad (4)$$

$$Z \geq T - \sum_{i=1}^{n_1} x_i^1 y_i^1 + \sum_{l=1}^{n_2} x_l^2 y_l^2 + \sum_{r=1}^{n_3} x_r^3 y_r^3 \quad (5)$$

$$Z \geq \sum_{i=1}^{n_1} x_i^1 y_i^1 + \sum_{l=1}^{n_2} x_l^2 y_l^2 + \sum_{r=1}^{n_3} x_r^3 y_r^3 - T \quad (6)$$

$$T - Z \alpha_{/2} \sqrt{k} \sigma \leq \sum_{i=1}^{n_1} x_i^1 y_i^1 + \sum_{l=1}^{n_2} x_l^2 y_l^2 + \sum_{r=1}^{n_3} x_r^3 y_r^3 \quad (7)$$

$$T + Z \alpha_{/2} \sqrt{k} \sigma \geq \sum_{i=1}^{n_1} x_i^1 y_i^1 + \sum_{l=1}^{n_2} x_l^2 y_l^2 + \sum_{r=1}^{n_3} x_r^3 y_r^3 \quad (8)$$

$$y_i^1 \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n_1. \quad (9)$$

$$y_l^2 \in \{0, 1\}, \quad l = 1, 2, \dots, n_2. \quad (10)$$

$$y_r^3 \in \{0, 1\}, \quad r = 1, 2, \dots, n_3. \quad (11)$$

La ecuación (4) asegura que la mínima diferencia en valor absoluto entre el peso total y el peso objetivo ( $Z$ ) sea mayor o igual a cero, dando cumplimiento a las ecuaciones (5) y (6). La restricción de nivel de confianza está representada por las ecuaciones (7) y (8). Asimismo, las restricciones para las variables binarias  $y_i^1$ ,  $y_l^2$  y  $y_r^3$  están representadas desde la ecuación (9) a la (11).

## 5. Resultados y análisis

El enfoque de optimización propuesto han sido comparado los parámetros de rendimiento más útiles del proceso ( $\mu_{paquete}$ ,  $\sigma_{paquete}$  y  $DNC$ ). Este análisis permitirá identificar si el enfoque es eficiente en términos de reducción de la variabilidad en el peso del paquete.

El experimento numérico se realizó de acuerdo con los siguientes valores de entrada. Número total de tolvas ( $n$ ): 8, 10, 12, 14 y 16, Número de tolvas a combinar ( $k$ ): 2, 3, 4, 5, 6 y 7, Peso objetivo ( $T$ ): 250 g, Distribución de las tolvas ( $d$ ):  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 6$  y  $n_3 = 5$ , Coeficiente de proporcionalidad ( $\gamma$ ): 0.331, Valor de cambio ( $\delta$ ): 1.5. Note que el número de tolvas en los subgrupos ( $n_1$ ,  $n_2$ , y  $n_3$ ) es aproximadamente igual para los diferentes valores de  $n$ .

La tabla 1 muestra los resultados de  $\mu_{paquete}$ ,  $\sigma_{paquete}$  y  $DNC$  para los casos donde  $n$  es dividido en 3 subgrupos (E\*) y los casos en los que  $n$  no es dividido en subgrupos (E). Como se puede observar, la variabilidad se reduce considerablemente cuando se incrementan el número total de tolvas ( $n$ ) y estas, son divididas en subgrupos. La mayor reducción en la variabilidad se logra para  $n = 16$  y  $k = 5$ . Se observa como los valores de la variabilidad no mejoran para valores extremos de  $k$ . Solo en los casos donde el número total de tolvas combinadas es mínimo (es decir,  $k = 2$ ), el enfoque de dividir las tolvas no parece ser conveniente. También se observa que los porcentajes de descarga de producto por incumplimiento de la restricción de nivel de confianza son mínimos, por lo tanto, esta restricción no afectaría los costos y tiempos de producción. Además, se evidencia que para las condiciones de mínima variabilidad, el proceso está centrado sobre su peso objetivo  $T$ . En términos generales, el enfoque de no dividir las  $n$  tolvas en subgrupos parece no ser útil en este tipo de procesos de envasado.



Tabla 1. Valores de los parámetros de rendimiento del proceso para  $k: \{2,3,4,5,6,7\}$ ,  $\gamma:\{0,331\}$  y  $n:\{8,10,12,14,16\}$ .

		$k$	2	3	4	5	6	7
8	E*	$\mu_{paquete}$	242.58	249.16	249.13	248.46	247.57	247.08
		$\sigma_{paquete}$	27.35	8.78	6.33	8.10	10.88	16.75
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.019	0.019	0.069
	E	$\mu_{paquete}$	249.36	249.28	249.67	249.63	249.72	249.67
		$\sigma_{paquete}$	17.46	13.90	14.23	15.59	17.30	20.33
		DNC (%)	0.009	0.00	0.00	0.009	0.00	0.049
10	E*	$\mu_{paquete}$	243.02	249.68	249.78	249.64	249.35	248.74
		$\sigma_{paquete}$	27.13	6.64	3.23	3.55	4.60	6.59
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	E	$\mu_{paquete}$	249.35	249.29	249.72	249.67	249.74	249.60
		$\sigma_{paquete}$	15.08	11.66	11.35	11.83	12.80	13.82
		DNC (%)	0.009	0.00	0.009	0.019	0.009	0.00
12	E*	$\mu_{paquete}$	242.97	249.93	249.94	249.91	249.84	249.71
		$\sigma_{paquete}$	28.52	5.77	1.40	1.61	2.26	2.74
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	E	$\mu_{paquete}$	249.27	249.30	249.68	249.62	249.75	249.62
		$\sigma_{paquete}$	13.55	10.40	9.75	10.21	10.42	10.89
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.009	0.009
14	E*	$\mu_{paquete}$	244.56	249.67	249.98	249.96	249.93	249.86
		$\sigma_{paquete}$	23.38	5.26	0.784	0.916	1.18	1.97
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	E	$\mu_{paquete}$	249.25	249.31	249.68	249.62	249.72	249.65
		$\sigma_{paquete}$	12.26	9.08	8.54	8.87	9.05	9.22
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.019
16	E*	$\mu_{paquete}$	243.92	249.92	249.99	250.00	249.97	249.99
		$\sigma_{paquete}$	25.30	4.13	0.323	0.055	0.837	0.527
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	E	$\mu_{paquete}$	249.24	249.33	249.66	249.62	249.73	249.59
		$\sigma_{paquete}$	10.98	8.31	7.85	8.17	8.18	8.17
		DNC (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

## 6. Conclusiones

Hemos presentado un enfoque para optimizar el proceso de envasado en máquinas pesadoras multicabezales. El enfoque propuesto exploró la configuración de llenado de las  $n$  tolvas de pesaje en la pesadora como técnica para disminuir la variabilidad en el peso del producto envasado. La optimización del proceso implicó el desarrollo de un modelo matemático y un algoritmo para la solución al problema de seleccionar los pesos en tolvas durante el proceso de producción.

Los resultados de los experimentos numéricos confirman que tanto el enfoque de selección (disminuir la diferencia absoluta entre el peso del paquete y su peso objetivo) como el procedimiento propuesto para llevar a cabo el proceso pueden resolver el problema de envasado de una manera eficiente. Se confirma que cuando se suministra una cantidad promedio diferente de producto a las tolvas la variabilidad en el peso del paquete se reduce. En este sentido, un igual suministro de producto a las tolvas de pesaje no parece ser conveniente en este tipo de procesos.

Se resalta el hecho de que valores extremos del número de tolvas combinadas  $k$  no garantizan una reducción en la variabilidad del proceso, aun cuando aumentos en los valores de  $k$  y  $n$  incrementan el número total de combinaciones de pesos para elegir. En futuras investigaciones pretendemos estudiar la configuración de la pesadora multicabezal para encontrar las condiciones óptimas operativas.

## Referencias

- Barreiro, J.J., González, C., and Salicrú, M., Optimization of Multiweighing Packing Proceeding, *Top*, Vol. 6, No.1, pp. 37-44, 1998.
- Beretta, A., and Semeraro, Q., On a RSM approach to the multihead weigher configuration. *Proceedings of the 11th biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ASME 2012*. Nantes, France, July 2 - 4, 2012.
- Beretta, A., Semeraro, Q., and del Castillo, E., On the Multihead Weigher Machine Setup Problem. *Packaging Technology and Science*, Vol 29, No. 3, pp. 175–188, 2016.
- Bierlaire, M., *Optimization: principles and algorithms*, 1<sup>st</sup> edition, EPFL Press, Lausana, 2015.
- Blum, C., Blesa-Aguilera, M.J., Roli, A., and Sampels, M., *Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization*, Springer, Berlin, 2008.
- Cook, W., Cunningham, W., Pulleyblank, W., and Schrijver, A., *Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- Del Castillo, E., Beretta, A., and Semeraro, Q., Optimal setup of a multihead weighing machine. *European Journal of Operational Research*, Vol. 259, No. 1, pp. 384 - 393, 2017.
- Duarte, A., Pantrigo, J.J., & Gallego Carrillo, M., *Metaheurísticas*. Dykinson, S.L., Madrid, 2007.
- Erdogdu F., *Optimization in Food Engineering*, Taylor and Francis, London, 2009.
- García-Díaz, J.C., and Pulido-Rojano, A., Monitoring and control of the multihead weighing process through a modified control chart, *DYNA*, Vol. 84, No. 200, pp. 135-142, 2017.
- García-Díaz, J.C., Pulido-Rojano, A., and Giner-Bosch, V. Bi-objective optimisation of a multihead weighing process, *European Journal of Industrial Engineering*, Vol.11, No.3, pp.403–423, 2017.
- Garey, M.R., and Johnson, D.S., *Computers and Intractability: A guide to the Theory of NP-Completeness*, WH Freeman and Company, New York, 1979.
- Imahori, S., Karuno, Y., Nagamochi, H., and Wang, X., Kansei engineering humans and computers: Efficient dynamic programming algorithms for combinatorial food packing problems, *International Journal of Biometrics*, Vol. 3, No.3, pp. 228-245, 2011.
- Imahori, S., Karuno, Y., Nishizaki, R. and Yoshimoto, Y., Duplex and Quasi-Duplex Operations in Automated Food Packing Systems, *Proceedings of the 2012 IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII)*, Fukuoka, Japan, December 16-18, 2012.
- Karuno, Y., Nagamochi, H., and Wang, X., Bi-criteria food packing by dynamic programming, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 50, No.4, pp. 376-389, 2007.
- Karuno, Y., Nagamochi, H., and Wang, X., Optimization Problems and Algorithms in Double-layered Food Packing Systems, *Journal of Advanced Mechanical Design, System, and Manufacturing*, Vol. 4, No.3, pp. 605-615, 2010.

- Karuno, Y., Takahashi, K., and Yamada, A., Dynamic Programming Algorithms with data rounding for combinatorial food packing problems, *Journal of Advanced Mechanical Design, System, and Manufacturing*, Vol. 7, No.2, pp. 233-243, 2013.
- Karuno, Y., and Tateishi, K., Improved Heuristics with data rounding for combinatorial food packing problems, *Proceedings of the IEEE 2014 7th international conference on service-oriented computing and applications*, Matsue, Japan, November 17 - 19, 2014.
- Keraita, J.N., and Kim, K-H., A Study on the optimum scheme for Determination of Operation time of Line Feeders in Automatic Combination Weighers, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 20, No.10, pp. 1567-1575, 2006.
- Keraita, J.N., and Kim, K-H., A Weighing Algorithm for Multihead Weighers, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 8, No.1, pp. 21-26, 2007.
- Marler, T., *Multi-Objective Optimization: Concepts and Methods for Engineering*, VDM Verlag, Saarbrücken, 2009.
- Michalewicz, Z., and Fogel, D.B., *How to Solve It: Modern Heuristics*, 2nd ed., Springer, Berlín, 2004.
- Nemhauser, G., and Wolsey, L., *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- Pulido-Rojano, A., García-Díaz, J.C., and Giner-Bosch, V., A multiobjective approach for optimization of the multihead weighing process *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IEEE-IESM'2015)*, Seville, Spain, October 21-23, 2015.
- Pulido-Rojano, A., and García-Díaz, J.C., Analysis of the Filling Setting in the Multihead Weighing Process, *Proceedings of the International Joint Conference - CIO-ICIEOM-IIE-AIM (IJC 2016)*, San Sebastián, Spain, July 13-15, 2016a.
- Pulido-Rojano, A., and García-Díaz, J.C., A modified control chart for monitoring the multihead weighing process, *Proceedings of International Conference on Computational Statistics (COMPSTAT 2016)*, Oviedo, Spain, August 23-26, 2016b.
- Salicrú, M., González, C., and Barreiro, J.J., Variability Reduction with Multiweighing Proceedings, *Top*, Vol. 4, No.2, pp. 319-329, 1996.

## **Biografía**

**Alexander Pulido-Rojano** es ingeniero industrial de la Universidad de la Costa, Colombia (2006), magíster en ingeniería industrial de la Universidad del Norte, Colombia (2012) y Ph.D en Estadística y Optimización de la Universitat Politècnica de València, España (2017). Ha trabajado en diversos proyectos de investigación y actualmente es profesor de planta en el programa de ingeniería industrial en la Universidad Simón Bolívar, Colombia. Sus intereses de investigación incluyen: La estadística aplicada y la optimización de procesos y servicios.

**J. Carlos García-Díaz** recibió su licenciatura en 1991, su MS en 1996 y su Ph.D en Estadística Aplicada en 2003 por la Universidad Politécnica de Valencia, España. Actualmente es consultor sénior en calidad y es profesor asociado en control estadístico de calidad en la Universidad Politécnica de Valencia. Sus intereses de investigación son el control estadístico de procesos, la optimización y la ingeniería de confiabilidad.