Modelo de Weber sobre Zonas Específicas

Lucía Cazabal-Valencia, Santiago-Omar Caballero-Morales, José-Luis Martínez-Flores, Damián-Emilio Gibaja-Romero
Departamento de Posgrado en Logística y Dirección de la Cadena de Suministro
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla
Puebla, C.P. 72410, México
lucia.cazabal01@upaep.edu.mx, santiagoomar.caballero@upaep.mx, joseluis.martinez01@upaep.mx, damianemilio.gibaja@upaep.mx

Resumen

Los problemas de localización de instalaciones siguen tomado gran importancia en el área de investigación de operaciones. Los criterios para decidir la localización de cualquier tipo de instalación se ve relacionado con los tiempos de respuesta ante distintos acontecimientos y/o ante restricciones de zonas. Las principales restricciones en problemas de localización de instalaciones restringen el establecimiento de las mismas en zonas prohibidas, zonas congestionadas o bien regiones de barrera. En el contexto de este problema, la mayoría de los estudios abarcan el problema de Weber sobre el plano para localizar una instalación. En el presente trabajo se extiende el problema de Weber sobre una superficie esférica con adaptación de restricciones para delimitar zonas para la localización de instalaciones. La solución de este modelo del problema de Weber con instancias de prueba da soporte a la validez de su planteamiento.

Palabras clave
Weber, restricciones de zona, esfera

1. Introducción

Como lo señala Church y ReVelle [1], una forma importante de medir la efectividad de una ubicación de instalación es mediante la designación de la distancia promedio recorrida por aquellos que lo visitan. En problemas ya abordados sobre la ubicación de instalaciones se consideran restricciones de capacidad para las plantas a localizar con el objetivo de satisfacer la demanda de los clientes ubicados en determinada zona. También se abordan problemas de localización con restricciones de áreas debido a la dificultad de acceso a la planta.

Alfred Weber introduce la teoría de localización de industrias en 1909. Si bien se sabe que el problema de Weber busca la ubicación de una instalación en relación con *n* fuentes de suministro de material sobre un plano, el objetivo se logra cuando la suma ponderada de las distancias del centro de servicio a los puntos de demanda se reduce al mínimo [2].

En consecuencia, se ha extendido el problema de Weber para su aplicación en superficies esféricas. Esto para localizar una instalación considerando una superficie muy similar a la que tiene el planeta Tierra, brindando una mayor precisión en los cálculos. Con ello el problema ha pasado a tener una gran importancia en las aplicaciones reales.
Un punto importante a mencionar es que estos modelos de Weber (en el plano y en la esfera) no consideran las condiciones de acceso, rasgos ecológicos, la comunicación viable o bien dimensión de la instalación; por lo tanto, disminuye la eficacia de la ubicación. Estas consideraciones son aplicables a instalaciones como escuelas, industrias, centros de servicio de emergencia y otros a los que la proximidad es deseable y cuentan con restricciones de este tipo. Así, en el presente trabajo se propone el modelo de Weber sobre la esfera para la localización de instalaciones, agregando la restricción de que el punto a localizar se encuentre dentro de una zona específica. Cabe mencionar que se utilizará la longitud de arco más corta para determinar la distancia entre los puntos dados y la ubicación óptima de la instalación.

© IEOM Society International

2. Marco teórico

En modelos de localización realistas, se deben incorporar diversos tipos de restricciones para representar mejor la realidad geográfica en su representación geométrica [3]. Los problemas de localización con regiones prohibidas han sido ampliamente estudiados [4]. Por otra parte, los problemas que implican barreras o congestionamientos físicos como las cordilleras, los ríos o los lagos aún dan lugar a muchas preguntas abiertas que son causadas por la no convexidad de sus funciones objetivas.

Uno de los problemas de localización y asignación más estudiados es el problema de la p-mediana. Las aplicaciones de este problema son numerosas; así, desde que Hakimi (1964) lo plantease, el problema de la p-mediana y sus extensiones se han utilizado para ubicar óptimamente almacenes, fábricas, sucursales bancarias, estaciones de ferrocarril, etc., utilizándose el término genérico de centro de servicio para referirse a cualquiera de ellos (llamándose por tanto centro de servicio a cada uno de los distintos puntos que componen una p-mediana). La mayor parte de aplicaciones anteriormente mencionadas parten de modelos deterministas, en los cuales todos los datos del problema son perfectamente conocidos. Los datos que se deben aportar para la resolución del problema son las distancias y costos, el número de centros de servicio que se deben localizar es una elección *a-priori* del solicitante.

Sin embargo, también se encuentra el problema de Weber que busca la ubicación de una instalación en relación con *n* clientes logrando la mínima distancia del centro de servicio a los puntos de demanda.

El concepto de restricciones en problemas de localización de instalaciones impone establecer y recorrer algunas zonas [5]. En este contexto se tienen las siguientes restricciones:

(i) zonas prohibidas;
(ii) zonas congestionadas;
(iii) regiones de barrera.

Se ha trabajado con el problema de Weber multi-fuente a partir de heurísticas constructivas y adaptativas para generar soluciones iniciales, basándose en orientar la búsqueda mediante la construcción de regiones restringidas que prohíben ubicar nuevas instalaciones demasiado cerca de las ubicaciones encontradas anteriormente. Cabe mencionar que en estos trabajos se considera una región restringida que está representada por un círculo cuyo radio se fija inicialmente a un valor fijo, basado en la escasez de los clientes y el número de instalaciones, y luego se propone un esquema que ajusta dinámicamente el radio en cada instalación [5].

Por mencionar otra aportación referente a la localización de instalaciones con restricción de zona, tenemos a Mehdi [6] y a Bischoff [3], que consideran el problema de localizar una nueva instalación con respecto a un conjunto dado de instalaciones existentes en el plano y en presencia de barreras convexas poliédricas. Se supone que una barrera es una región donde ni la ubicación de la instalación ni los viajes están permitidos. En el trabajo de Bischoff se considera el modelo de Weber en el plano, considerando distancias euclidianas.

Como ya se ha mencionado antes, el problema de Weber en la esfera ha tomado gran importancia en estudios de aplicaciones reales, por la forma que asemeja a la Tierra. Cualquier lugar de la Tierra se determina con dos parámetros: su latitud (ϕ) y su longitud (θ). En el globo terráqueo, las líneas de latitud son círculos de diferentes tamaños. El mayor es el ecuador, cuya latitud es 0°, mientras que en los polos, las latitudes son 90° en el Norte y 90° en el Sur (-90°). Las longitudes se miden desde 0º a 180° en el Este y a 180° Oeste (-180°), ambas longitudes de 180º se encuentran en la misma línea en medio del Océano Pacífico (véase Figura 1).

© IEOM Society International

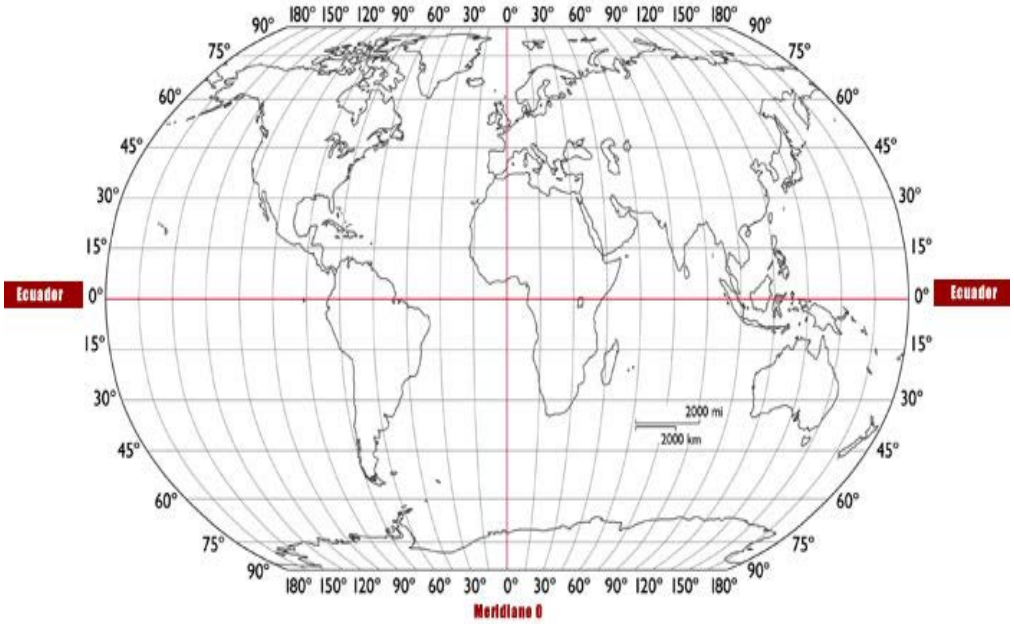

Figura 1. Representación geográfica de la Tierra

3. Metodología

3.1 Definición del problema

Ubicación de instalaciones en regiones específicas dadas que permita ubicar una nueva instalación cerca de una ubicación candidata o existente. Esto con el fin de minimizar la suma de las distancias de los puntos dados al centro óptimo localizado sobre una superficie esférica.

3.2 Formulación del modelo matemático

Para realizar el análisis de cada una de las instancias convenientes para las instalaciones a ubicar, se emplea el modelo de Weber sobre la esfera, debido a que este se adecua a las necesidades del problema.

De acuerdo a Cazabal-Valencia [7] la distancia entre dos puntos sobre una esfera se define como la longitud de arco más corta, teniendo en cuenta dos puntos $P_1 = (\phi_1, \theta_1)$ y $P_2 = (\phi_2, \theta_2)$ con latitud y longitud correspondiente y considerando la esfera unitaria (radio igual a 1) en donde la longitud de arco más corta se define por:

$$\alpha = \arccos[cos\phi_1 cos\phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + sen\phi_1 sen\phi_2] \quad (1)$$

considerando que $-\pi/2 < \phi \leq \pi/2$ y $-\pi < \theta \leq \pi$.

El objetivo consiste en encontrar una ubicación en cierta zona dada a modo de minimizar las distancias totales de los clientes a el punto óptimo localizado.

Sean n puntos de demanda $P_i = (\phi_i, \theta_i)$ $i = 1, \dots n$ con los pesos w_i asociados. Tenemos que encontrar una ubicación de la instalación $P = (\phi, \theta)$ que minimiza la suma ponderada de las distancias a los puntos de demanda:

$$\underset{\phi,\theta}{Min.} \ \sum_{i=1}^{n} w_i d_i \quad (2)$$

© IEOM Society International

$$s.a. \qquad \phi_{l1} \leq \phi \leq \phi_{l2} \tag{3}$$

$$\theta_{l1} \leq \theta \leq \theta_{l2} \tag{4}$$

Donde $-\pi/2 < \phi \leq \pi/2$ y $-\pi < \theta \leq \pi$, d_i es la distancia entre P_i y P dada por α, y ϕ_{l1}, ϕ_{l2}, θ_{l1} y θ_{l2} son los límites de determinación de zona, dados en latitud y longitud respectivamente. Así la restricciones aseguran que la instalación a localizar esté dentro de los límites establecidos por ϕ_{l1}, ϕ_{l2}, θ_{l1} y θ_{l2}.

3.3 Parámetros y datos relevantes

Se tiene un conjunto de clientes, ubicados en *n* puntos fijos. Para una primera instancia se consideran 10 puntos con sus respectivas ubicaciones geográficas (véase Tabla 1). Se requiere localizar una instalación en la zona específica de Nebraska que se muestra en la Figura 2, la cual está determinada por los límites de latitud y longitud mostrados en la Tabla 2.

Tabla 1. Ubicación geográfica de puntos

	Puntos	Latitud [°]	Longitud [°]	Latitud [Rad]	Longitud [Rad]
1	Lamboano, Filipinas	11.0899592	122.3499269	0.193556302	2.135409064
2	Lhasa, China	29.6490404	91.0052385	0.517473375	1.588341048
3	Kuala, Malasia	3.139172	101.6168147	0.054788887	1.773547992
4	Vorkuta, Komi	67.5017026	63.9550954	1.178126961	1.116226988
5	Sudak, Crimea	44.8577431	34.9399315	0.782915312	0.609816845
6	Puebla, México	19.0402195	-98.2630058	0.332314521	-1.715012984
7	Oklahoma, E. U.	35.4828833	-97.7593886	0.619293142	-1.706223206
8	Cochabamba, Bolivia	-17.3938831	-66.2339161	-0.30358053	-1.155999912
9	Sta. Cruz, Argentina	-49.099378	-74.1426339	-0.856945807	-1.294033078
10	Los Ángeles, E.U.	34.0207504	-117.6919243	0.593774108	-2.054111582

Figura 2. Ubicación geográfica de zona específica

© IEOM Society International

Tabla 2. Límites de zona específica

	Latitud [°]	**Longitud [°]**	**Latitud [Rad]**	**Longitud [Rad]**
Cherry	42.54	-101.12	0.742463064	-1.76487694
Cedar	42.6	-97.25	0.743510261	-1.697332698
Jeff	40.17	-97.15	0.701098761	-1.695587368
Hitch	40.18	-101.04	0.701273293	-1.763480676

Así por la forma rectangular de la zona específica, los límites quedan determinados en coordenadas geográficas como $0.7012 \leq \phi \leq 0.7424$ y $-1.7634 \leq \theta \leq -1.6955$ para latitud y longitud respectivamente.

A continuación, se muestra el mapa geográfico de ubicaciones de puntos y cabe mencionar que la zona específica se determinó a partir de un punto de referencia, siendo este la solución dada por el modelo de Weber sin restricción de zona (punto amarillo) en la Figura 3.

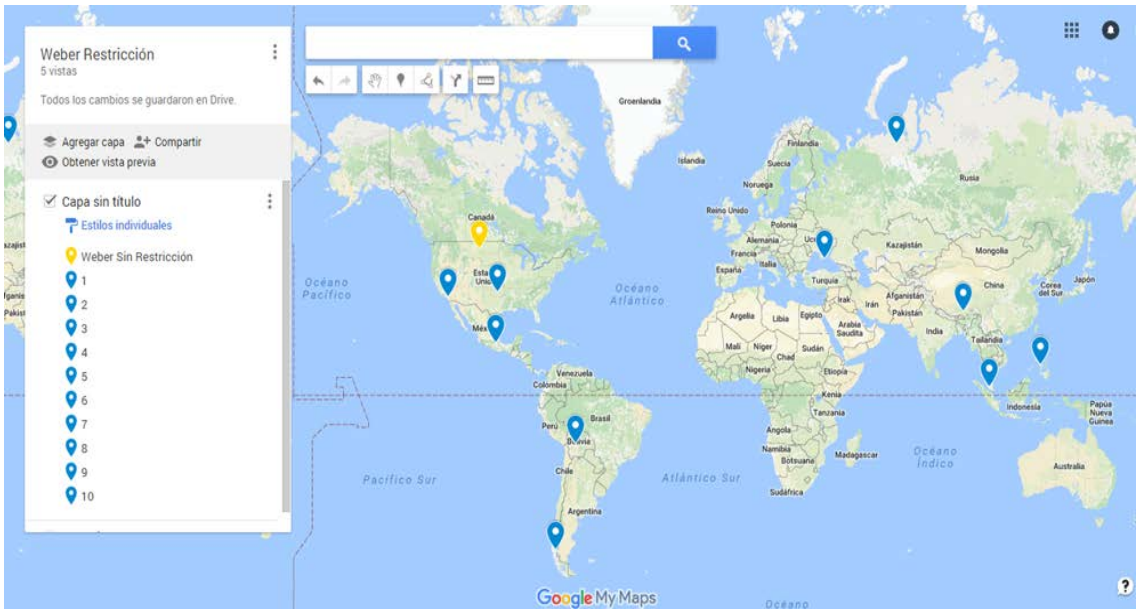

Figura 3. Ubicación geográfica de puntos y punto de referencia

4. Instancias evaluadas y analizadas

4.1 Primera instancia

En la evaluación de la primera instancia se consideran los 10 puntos dados anteriormente con los límites de zona de la Tabla 2. La solución óptima $P^* = (0.7424, -1.7634)$ $(en\ grados\ 42.5400, -101.0400)$ esta dentro de los limites especificados. En la Figura 4 se puede notar que la ubicación está muy cercana a uno de los límites (Cherry). La función objetivo es de 79284144.6 metros.

© IEOM Society International

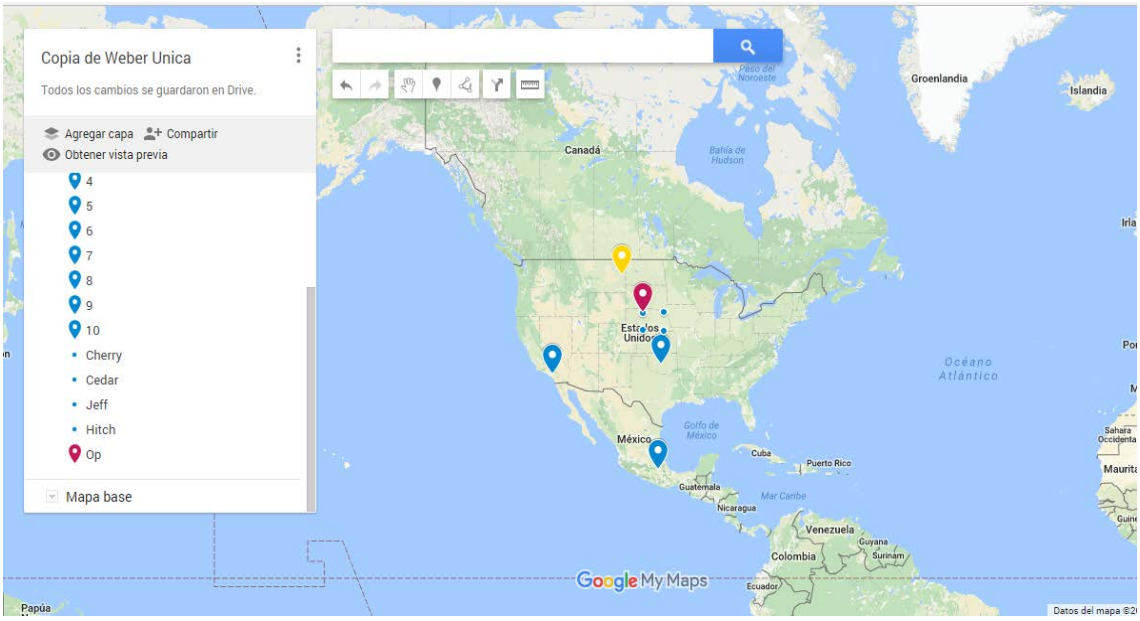

Figura 4. Solución óptima en zona específica

4.2 Segunda instancia

Se evalúa una segunda instancia para ver el comportamiento del modelo, tomando los mismos puntos, pero ahora especificando una diferente zona de ubicación para el punto óptimo. Los límites de zona ahora se localizan al Oeste del punto de referencia, los cuales se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Límites de zona para segunda instancia

	Latitud [°]	**Longitud [°]**	**Latitud [Rad]**	**Longitud [Rad]**
Medford	42.3436931	-122.9141653	0.739036862	-2.145256882
Fields	42.2633428	-118.6836101	0.737634485	-2.071419764
Warden	47.0587582	-118.9524712	0.821330272	-2.076112276
Olympia	47.0394291	-122.9639087	0.820992916	-2.146125068

Los límites quedan determinados en coordenadas geográficas como $0.7390 \leq \phi \leq 0.8209$ y $-2.1452 \leq \phi \leq -2.0714$.

En esta instancia se obtiene una función objetivo de 79728691.1 metros. Si bien se nota que este valor es mayor a la primera instancia, no olvidemos que el objetivo es ubicar en un lugar que cumpla ciertas exigencias de territorio, ecológicas o bien de libre acceso, por tal motivo no se desprecia la solución dada. Es muy importante notar que nuevamente la solución óptima P*= (0.8209, -2.0714) (en grados 47.0394, -118.6836) cae dentro de los limites dados y para ser más específicos casi en uno de los límites (Warden), como se muestra en la Figura 5.

© IEOM Society International

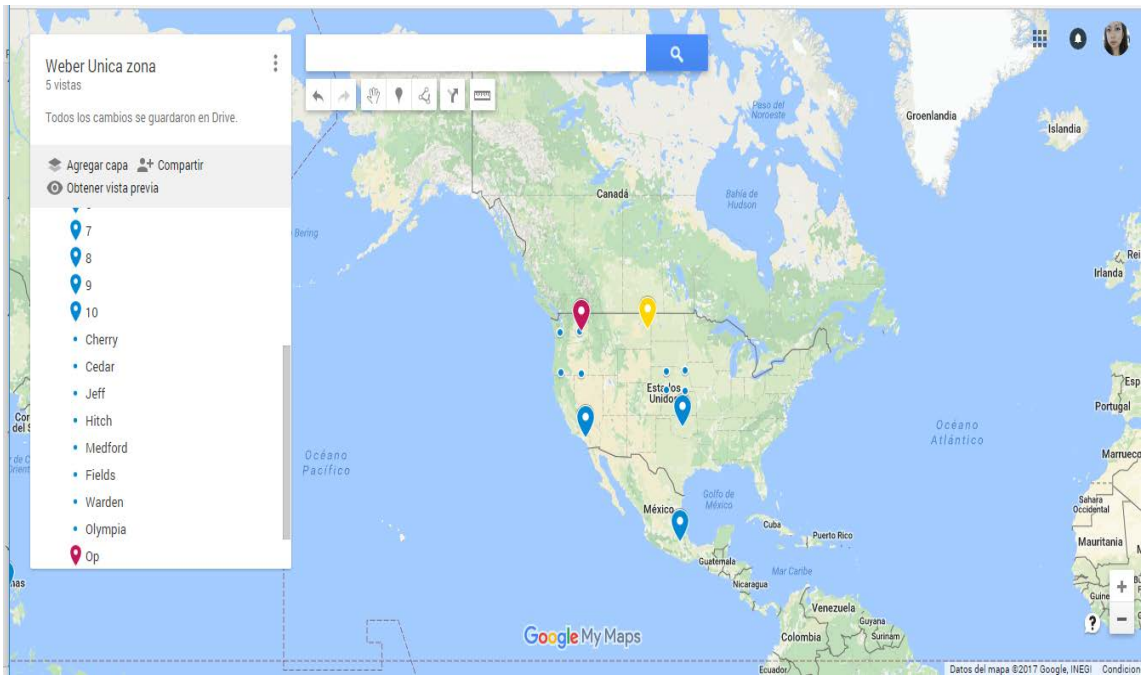

Figura 5. Solución óptima en zona específica para la segunda instancia

5. Conclusiones

La selección de un lugar geográfico entre varios para la ubicación de instalaciones, tiene un gran impacto dentro de cualquier organización, pues no solo son cuestiones de costos, tiempos de respuesta, rentabilidad, sino que también, se deben considerar factores ecológicos, zonas restringidas, desplazamientos o bien regiones de barrera.

Aplicando el modelo de Weber sobre la esfera con las restricciones de ubicación geográfica, se logra localizar instalaciones dentro de los limites especificados, considerando como referencia un punto propuesto o bien la solución óptima dada por el modelo de Weber sin restricciones.

Al aplicar el modelo de Weber con la restricción de zonas específicas, se observó que los nuevos puntos óptimos se localizan en la frontera de la zona determinada y siendo más concretos muy cerca de una de las esquinas del área determinada.

El trabajo a futuro será enfocado en modelar matemáticamente las zonas determinadas con diferentes características de forma.

Referencias

[1] Church, R.L., y ReVelle, C.S., Theoretical and computational links between the p-median location set-covering and the maximal covering location problem, Geographical Analysis, no. 8, pp. 406-415, 1976.
[2] Weber, A., Uber den Standort der Industrien (Alfred Weber's Theory of the Location of Industries), University of Chicago, 1929.
[3] Bischoff, M., y Klamroth, K., An efficient solution method for Weber problems with barriers based on genetic algorithms, *European Journal of Operational Research*, no. 177, pp. 22–41, 2007.
[4] Hamacher, H.W., y Nickel, S., Restricted planar location problems and applications, *Naval Research Logistics*, no. 42, pp. 967–992, 1995.
[5] Martino, L., Said, S., y Gábor, N., Region-Rejection Based Heuristics for the Capacitated Multi-Source Weber Problem, *Working Paper*, No.181, 2008.

© IEOM Society International

[6] Mehdi, A., Reza, Z., y Walid, K., A rectilinear distance location–relocation problem with a probabilistic restriction: Mathematical modelling and solution approaches, *International Journal of Production Research*, 2015.
[7] Cazabal, L., Caballero, S.O., y Martínez, J.L., Logistic Model for the Facility Location Problem on Ellipsoids, *International Journal of Engineering Business Management*, 2016.

Biografía

Lucía Cazabal Valencia actualmente estudia el Doctorado en Logística y Dirección de la Cadena de Suministros en la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla. Es Maestra en Ciencias con especialidad en Logística y Dirección de la Cadena de Suministros y Licenciada en Matemáticas Aplicadas. Se desempeña laboralmente como catedrática a nivel ingeniería en las áreas de Matemática e Investigación de Operaciones en la Universidad Tecmilenio Campus Puebla. Sus intereses de investigación están enfocados principalmente a la modelación matemática y evaluación de soluciones a través de software especializado.

Santiago Omar Caballero Morales actualmente es profesor investigador de tiempo completo en el Departamento de Posgrado en Logística y Dirección de la Cadena de Suministro en la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla. Es Doctor en Ciencias Computacionales con Especialidad en Reconocimiento de Imágenes y Voz, Maestro en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Industrial y Licenciado en Ingeniería Electrónica y Comunicaciones. Sus intereses de investigación están enfocados principalmente al diseño de meta-heurísticos y técnicas de inteligencia artificial para optimización de problemas multidisciplinarios en ingeniería. Ha sido miembro activo del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) desde 2011.

José-Luís Martínez-Flores es profesor investigador de tiempo completo y coordinador del Departamento de Posgrado en Logística y Dirección de la Cadena de Suministro en la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla A.C. Es Licenciado en Matemáticas, Maestro en Ciencias con especialidad en Administración, y Doctor en Ingeniería. Ha publicado artículos en revistas y congresos internacionales en el campo de Diseño de Redes de Cadenas de Suministro, Modelado Matemático, y Sistemas de Información Logísticos. Es consultor líder para empresas nacionales e internacionales en México y es miembro activo de la Asociación Mexicana de Logística y Cadena de Suministro, la Sociedad Mexicana de Investigación de Operaciones, la Sociedad de Matemáticas Aplicadas, y la American Mathematical Society. También es miembro activo del Sistema Nacional de Investigadores (SNI).

© IEOM Society International